

Física Matemática II

Lista VIII Integrais Impróprias

1. Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$.

Resp. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

2. Sendo a, b, c números reais, $b^2 < 4ac$, verifique que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

3. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a + b)}$$

onde $a \geq b > 0$; considere as duas possibilidades: $a \neq b$ e $a = b$.

1. Calcule as integrais seguintes:

a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 4} dx, a > 0;$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 4x + 20} dx;$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + a^2)} dx, a > 0;$ d) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$

Resps. a) $\frac{\pi e^{-2a}}{4}$; b) $\frac{\pi e^{-4} (2 \cos 2 + \operatorname{sen} 2)}{2}$; c) $\frac{\pi (1 - e^{-a})}{a^2}$; d) $\frac{\pi}{4e}$.

Integrandos multivalentes

Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x \sqrt{x}}{x^3 + 1} ; \quad b) \int_0^{\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

2. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-\alpha)} = \frac{\pi i \operatorname{Im} \alpha}{\alpha |\operatorname{Im} \alpha|}, \quad \operatorname{Im} \alpha \neq 0.$$

Sugestão. Integre ao longo do contorno usado no cálculo da integral de $\sin x/x$ na Seção 5.4.

Integrais de funções trigonométricas

1. Calcule as seguintes integrais:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2 \theta} ; \quad b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}, \quad a^2 < 1;$$

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \sin \theta}, \quad a^2 < 1; \quad d) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta}, \quad a > b > 0.$$

$$\text{Resps. } a) \frac{2\pi}{\sqrt{6}} ; \quad b) \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} ; \quad c) \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} ; \quad d) \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$