Física Matemática II

Lista VII Singularidades

1. Determine os pólos e respectivas ordens de cada uma das funções seguintes:

a) $\dfrac{z+4}{z\,(z^2+1)^2}$; *b)* $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3\,(z-\pi)}$; *c)* $\dfrac{1}{z\,\operatorname{sen}^2 \pi z}$;

d) $\dfrac{1-e^z}{z^4\,\operatorname{sen}(1+z)}$; *e)* $\dfrac{1}{(e^{iz}-1)^2}$; *f)* $\dfrac{e^z}{z\,(1-e^{-z})}$.

Resps. *a)* $z=0,\ i,\ -i$, de ordens 1, 2, 2;

b) $z=0$, de ordem 2;

c) $z=0$, de ordem 3; $z=\pm 1, \pm 2, \ldots$, de ordens 2;

d) $z=0$, de ordem 3; $z=n\pi-1$ (n inteiro), de ordens 1;

e) $z=2k\pi$ (k inteiro), de ordens 2;

f) $z=0$, de ordem 2; $z=2k\pi i$ (k inteiro $\neq 0$), de ordem 1.

2. Determine a parte singular da função

$$f(z)=\frac{1}{z\,(z-i)^2}$$

relativa ao pólo $z=i$.

Resp. $\dfrac{-i}{(z-i)^3}+\dfrac{1}{(z-i)^2}+\dfrac{i}{z-i}$.

3. Mostre que $z=0$ é singularidade removível das funções

a) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$; *b)* $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$.

Teorema dos Resíduos

1. Seja $f(z)$ uma função analítica e diferente de zero no ponto $z = z_0$. Mostre que a função

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

tem pólo simples nesse ponto, como resíduo igual a $f(z_0)$.

2. Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções regulares no ponto z_0, $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$. Mostre que z_0 é pólo simples da função

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad ,$$

com resídulo igual a $\dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$.

3. Determine os pólos, as ordens e os resíduos correspondentes para cada uma das funções seguintes:

a) $\dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^4}$; *b)* $\dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^6}$; *c)* $\coth z$; *d)* $\dfrac{e^z}{4z^2 + \pi^2}$.

Sugestão. Desenvolva os numeradores de *a)* e *b)* em séries de potências; use o resultado do Exerc. 2 em *c)* e *d)*.

4. Use a regra (5.8) para determinar o resíduo de

$$f(z) = \frac{e^{\pi i z}}{(z - \pi)^4}$$

no seu pólo $z = \pi$. Obtenha o mesmo resultado desenvolvendo $e^{i\pi z} = e^{i\pi^2} e^{i\pi(z - \pi)}$ em série de potência de $z - \pi$.

5. Determine os pólos e calcule os resíduos correspondentes para as seguintes funções:

a) $\dfrac{e^{3z}}{z(z-1)^2}$; *b)* $\dfrac{1}{z \operatorname{sen} z}$; *c)* $\dfrac{e^z}{z \operatorname{sen} z}$.

6. Calcule a integral

$$\oint_C \frac{e^z}{(z - i)(z^2 + 4)} \, dz,$$

onde C é o círculo $|z| = 3$. Faça o mesmo tomando para C os seguintes círculos, sucessivamente:

a) $|z + 3i| = 3$; *b)* $|z - 2i| = 1/3$; *c)* $|z - 1| = 2$.

7. Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\oint_{|z| = 1} \frac{e^z}{\operatorname{sen} z} \, dz$; *b)* $\displaystyle\oint_{|z - 1| = 1} \tan 3z \, dz$; *c)* $\displaystyle\oint_{|z| = 2} \frac{\cot z}{z} \, dz.$