Física Matemática II

Lista VI : Serie de Taylor

1. Obtenha os seguintes desenvolvimentos, válidos para todo z:

a) $\operatorname{sen} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$;

b) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} z^{2n}$;

c) $\operatorname{senh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

d) $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

2. Obtenha as séries de potências de z das seguintes funções:

a) $\cos^{-1} z$; *b*) $\tan^{-1} z$; *c*) $\frac{1+z}{\sqrt[3]{1-z^2}}$.

Considere as determinações dadas por $\cos^{-1} 0 = 1$, $\tan^{-1} 0 = 0$ e $\sqrt[3]{1} = 1$.

3. Desenvolva em série de potências de $z - 1$ a determinação principal ($\ln 1 = 0$) de $f(z) = z \ln z - z$.

4. Desenvolva em série de potências de z e $(z-4)$ respectivamente as funções

$$f(z) = \frac{1}{(4-z)^3} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{1}{z^5}$$

e represente graficamente seus discos de convergência.

Sugestão. Observe que $f(z) = \frac{1}{4^3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{4}\right)^3}$ e aplique o desenvolvimento binomial. Quanto a $g(z)$, proceda de um modo análogo, notando que $z = 4 + (z-4)$.

Serie de Laurent

3. Obtenha as séries de Laurent nos seguintes casos:

a) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 1$, $0 < |z-1| < 1$;

b) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 1$, $1 < |z-1|$;

c) $f(z) = \dfrac{z^5}{z-1}$, $z_0 = 0$, $1 < |z|$;

d) $f(z) = z^5 e^{1/z}$, $z_0 = 0$, $1 < |z|$.

4. Demonstre que uma função analítica no plano estendido (inclui $z = \infty$) é necessariamente constante. (Este é outro modo de formular o Teorema de Liouville tratado na Seç. 3.8.)

5. Seja f uma função regular no ponto z_0. Mostre que z_0 é um zero de ordem m de f se e somente se

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

6. Mostre que as funções

$$(\cos z - 1)^3 \operatorname{sen} z \quad \text{e} \quad (e^z - 1 - z)^3 \operatorname{sen}^2 z$$

possuem zeros de ordem 7 e 8, respectivamente, no ponto $z = 0$.