Física Matemática II

Lista V : Integrais de caminho

1. Calcule a integral de $|z|$ nos seguintes casos:

a) Ao longo do semicírculo $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$;

b) Ao longo do semicírculo $z = re^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi$.

Resps. *a)* $-2r^2$; *b)* $-2ir^2$.

2. Calcule a integral $\int_C \sqrt{z}\, dz$ nos seguintes casos:

a) Ao longo do semicírculo $z = re^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$;

b) Ao longo do círculo $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$;

c) Ao longo do círculo $z = e^{i\theta}$, $\pi \leqslant \theta \leqslant 3\pi$.

Resps. *a)* $\frac{2r\sqrt{2r}\, i}{3}$; *b)* $-4/3$; *c)* $4i/3$.

3. Calcule a integral de $x^2 - y^2 + i(x - y^2)$ ao longo do segmento que une a origem ao ponto $3 + 2i$.

Resp. $(28 + 23i)/6$.

4. Calcule a integral $\int_0^{2+i} (y - x^2)\, dz$:

a) Ao longo do eixo $y = 0$ e da reta $x = 2$;

b) Ao longo do eixo $x = 0$ e da reta $y = 1$ (veja Fig. 3.10).

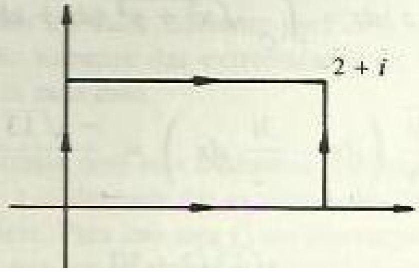
Resps. *a)* $-(16 + 21i)/6$; *b)* $(-4 + 3i)/6$.

5. Calcule a integral

$$\int_C \ln z\, dz,$$

onde $C = \{z = re^{i\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$.

Resp. $2\pi ir$.



6. Sem calcular a integral, mostre que

$$\left|\int_1^{1+i} \frac{dz}{z}\right| \leqslant 1,$$

onde a integração é ao longo do segmento $[1, 1+i]$.

Sugestão. Use (3.9).

7. Mesma questão para

$$\left|\int_1^{1+i} \frac{z+2}{z}\, dz\right| \leqslant 3,$$

onde a integração é ao longo do segmento $[1, 1+i]$.

8. Demonstre que $\int_{C_\epsilon} (\ln z)^c\, dz \to 0$ com $\epsilon \to 0$, onde C_ϵ é o contorno $z = \epsilon e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ e c é um número real qualquer.

Sugestão. Use (3.9) e lembre-se de que $\epsilon(\ln \epsilon)^c \to 0$ com $\epsilon \to 0$.

9. Seja $z_0 = re^{i\theta_0}$ e C o contorno $z = re^{i\theta}$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + 2\pi$. Mostre que

$$\int_C z^c dz = \frac{z_0^{c+1}}{c+1}\left[e^{(c+1)2\pi i} - 1\right].$$

10. Prove que se $f(z)$ é contínua na origem $z = 0$, então

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi} f(\epsilon e^{i\theta})\, d\theta = 2\pi f(0).$$

11. Demonstre que $\int_C z^n dz = 0$, onde n é um inteiro positivo e C é qualquer contorno fechado.

12. Seja C o círculo $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Mostre que $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$ e $\int_C \frac{dz}{z^n} = 0$, onde n é um inteiro $\geqslant 2$.

Primitivas

ao longo de qualquer contorno C_1 que não passe pelo terceiro quadrante. Calcule a mesma integral usando um contorno C_2 todo contido no terceiro quadrante (Fig. 3.20).

Resp. $3\pi i/2$ e $-i\pi/2$.

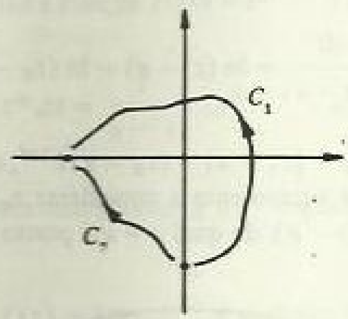


Fig. 3.20.

4. Como no exercício anterior, calcule

$$\int_{C_1} \ln z\, dz \quad \text{e} \quad \int_{C_2} \ln z\, dz,$$

tomando para o ponto inicial $-i$ o argumento $-\pi/2$. [Observe que $(z \ln z - z)' = \ln z$.]

Resp. $1 + \dfrac{\pi}{2} - i(1 + \pi)$ e $1 + \dfrac{\pi}{2} + i(\pi - 1)$.

5. Calcule as integrais seguintes, ao longo de contornos quaisquer ligando os pontos limites indicados:

$$\int_3^{i/\pi} \cos \pi z\, dz, \qquad \int_\pi^{i\pi} z e^{z^2}\, dz.$$

6. Calcule a integral $\displaystyle\int_C \frac{z}{3z^2 + 7}\, dz$, onde C é qualquer contorno ligando $e^{-i\pi/4}$ a $e^{i\pi/4}$ e todo contido no semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.

Integral de Cauchy

1. Use a Fórmula de Cauchy para calcular as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^2+1}{z+2}\,dz$; *b)* $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{2z+i}\,dz$; *c)* $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\ln(z+5)}{z^2-2iz+3}\,dz$.

Nesta última considere o ramo do algoritmo que corresponde a $\ln x > 0$ para $x > 1$.

Sugestão. Ponha os integrandos na forma $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$.

2. Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2}\,dz$; *b)* $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3}\,dz$;

c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\ln(z^2+2)}{(3z-2)^2}\,dz$.

Observe que o valor desta última integral independe do ramo particular de $\ln(z^2+2)$ usado na integração.