Física Matemática II

Lista II : Números Complexos – Representação Polar

1. Determine o argumento dos números complexos abaixo, escreva-os na forma polar e represente-os geometricamente.

a) $z = -2 + 2i$; *b)* $z = 1 + i\sqrt{3}$; *c)* $z = -\sqrt{3} + i$;

d) $z = \left(\dfrac{i}{1+i}\right)^5$; *e)* $z = \dfrac{1}{-1 - i\sqrt{3}}$; *f)* $z = -1 - i$;

g) $z = \dfrac{-3 + 3i}{1 + i\sqrt{3}}$; *h)* $z = \dfrac{-4}{\sqrt{3} - i}$.

Resps. *a)* $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$; *b)* $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$;

c) $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$; *d)* $z = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

2. Reduza os números z_1 e z_2 a seguir à forma polar e determine as representações polares de $z_1 z_2$ e z_1/z_2. Represente esses quatro números geometricamente.

a) $z_1 = \sqrt{3} + 3i$, $z_2 = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$;

b) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$;

c) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

3. Prove que se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, então z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo eqüilátero inscrito no círculo unitário de centro na origem. Faça um gráfico.

4. Mostre que:

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta$,

$\text{sen}\,3\theta = -\text{sen}^3\,\theta + 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta$.

Sugestão. Desenvolva $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3$ pela Fórmula do Binômio e pela Fórmula de De Moivre.

5. Obtenha fórmulas análogas para $\cos 4\theta$ e $\text{sen}\,4\theta$.

Módulo de um número complexo

1. Verifique as relações:

a) $\left|\dfrac{(\sqrt{3}+i)(1-3i)}{\sqrt{5}}\right| = 2\sqrt{2}$; *b)* $\left|\dfrac{2+i}{2-i\sqrt{3}}\right|^2 = \dfrac{5}{7}$.

2. Demonstre a desigualdade

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

Interprete o resultado graficamente, isto é, procure ver o significado geométrico disso.

3. Supondo ser $|z_2| > |z_3|$, prove que

$$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leqslant \frac{|z_1|}{|z_2| - |z_3|} \quad ; \quad \left|\frac{z_1}{z_2-z_3}\right| \leqslant \frac{|z_1|}{|z_2| - |z_3|} .$$

4. Prove que $|z| \leqslant |x| + |y| \leqslant \sqrt{2}\,|z|$, onde $z = x + iy$.

5. Prove que $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$, quaisquer que sejam os números complexos z_1 e z_2.

6. Prove que se vale a desigualdade do exercício anterior, então $|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, quaisquer que sejam os números z_1 e z_2.

Raízes

1. Calcule as raízes a seguir e faça os gráficos correspondentes.

a) $\sqrt{-4}$; *b)* $(1 + i\sqrt{3})^{1/2}$; *c)* $\sqrt[3]{i}$; *d)* $\sqrt[3]{-i}$;

e) $(-1 + i\sqrt{3})^{1/4}$; *f)* $\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}$.

Resps. c) $(\sqrt{3}+i)/2, \quad (-\sqrt{3}+i)/2, \quad -i;$

e) $\pm \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}, \quad \pm \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt[4]{8}}.$

2. Usando o procedimento do fim da Seç. 1.3, calcule as raízes seguintes:

a) $\sqrt{-5-12i}$; b) $\sqrt{3+4i}$; c) $\sqrt{1+2i\sqrt{6}}$.

3. Nos casos seguintes, resolva as equações $P(z)=0$ e fatore os polinômios $P(z)$.

a) $P(z)=z^6-64$; b) $P(z)=z^4+9$; c) $P(z)=3z^2-i$; d) $P(z)=5z^3+8$.

Resps. a) $P(z)=(z+2)(z-2)(z+1+i\sqrt{3})(z+1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3})\circ$
$\circ\,(z-1-i\sqrt{3})$;

d) $P(z)=5\left(z+\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)\left(z-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}\right)\left(z-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}\right).$

4. Resolva as seguintes equações:

a) $z^2-2z+2=0$; b) $2z^2+z+1=0$; c) $z^2+(1-2i)z+(1+5i)=0$;

d) $z^4+(1-i)z^2+2(1-i)=0$.

Conjunto de números complexos

1. Represente graficamente os seguintes conjuntos:

a) $\operatorname{Re} z<-3$; b) $\operatorname{Im} z\geqslant 1$; c) $|z-2i|>2$; d) $|z+1|\leqslant 2$;

e) $|z - 1 + i| < 3$; *f*) $z \neq 0,\ 0 \leqslant \arg z < \pi/3$; *g*) $|z| > 2,\ -\pi < \arg z < \pi$;

h) $1 < |z + 1 - 2i| < 2$; *i*) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{4}$; *j*) $|3z - 2i| \leqslant 5$; *k*) $\operatorname{Im} z^2 < 0$;

l) $\operatorname{Re} z^2 > 0$; *m*) $z \neq 0,\ |\arg z^3| < \frac{2\pi}{3}$; *n*) $\operatorname{Im} z^3 > 0$.

Sol.: *i*) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{|z|^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 > 4$. Logo, o conjunto em questão é o exterior do disco de centro $z_0 = 2$ e raio 2.

2. Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma reta. Faça gráficos.

a) $|z - 2| = |z - 3i|$; *b*) $|z + 5| = |z - 1 - i|$;

c) $|z - 1 + i| = |3 + i - z|$; *d*) $|z + 3 - i| = |z - 4i|$;

e) $|z - 1 + i| = |1 - i\sqrt{3} + z|$; *f*) $|(z - i)(1 - i\sqrt{3})| = |2z|$.

Resps. *b*) Mediatriz do segmento $[-5,\ 1 + i]$;

d) Mediatriz do segmento $[-3 + i,\ -4i]$. Note que

$|z - 4i| = |z - 4i| = |z + 4i|$;

f) Mediatriz do segmento $|0,\ i|$.

3. Identifique os conjuntos de pontos z nos casos a seguir. Faça gráficos.

a) $|z - i| + |z + 2| = 3$; *b*) $|z - 2 + i| + |z| \leqslant 4$;

c) $|z - 2| = 2|z + 2i|$; *d*) $\operatorname{Re}(1 - z) = |z|$.

Resps. *a*) Elipse de focos i e -2, excentricidade $\sqrt{5}/3$; *c*) Círculo de raio $\sqrt{32}/3$ e centro $-(2 + 8i)/3$, equação $3x^2 + 3y^2 + 4x + 16y + 12 = 0$; *d*) Parábola de equação $y^2 + 2x - 1 = 0$.