

Física Matemática II

Lista I : Números Complexos

1. Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões complexas seguintes:

a) $(3 + 5i) + (-2 + i)$; b) $(-3 + 4i) - (1 - 2i)$;

c) $(\sqrt{3} - 2i) - i[2 - i(\sqrt{3} + 4)]$; d) $(3 - 5i)(-2 - 4i)$;

e) $\left(1 + \frac{i}{3}\right)\left(-\frac{6}{5} + 3i\right)$; f) $(3i - 1)\left(\frac{i}{2} + \frac{1}{3}\right)$; g) $(3i - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{3}\right)$;

h) $7 - 2i\left(2 - \frac{2i}{5}\right)$; i) $(2 + 3i)^2$; j) $(4 - 2i)^2$;

k) $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5$.

Resps. a) $1 + 6i$; c) $-4 - 4i$; d) $-26 - 2i$; e) $-\frac{11}{5} + \frac{13i}{5}$;

g) $-\frac{3}{2} + \frac{7}{6}i$; i) $-5 + 12i$; j) $12 - 16i$; k) $3 + 4i$.

2. Mostre que $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

3. Mostre que $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$.

4. Mostre que $(1 + i)^3 = -2 + 2i$.

5. Mostre que $1 + i^5 + 2i^{10} + 3i^{13} = -1 - 2i$.

6. Mostre que $(x + iy)^2(x - iy)^2 = (x^2 + y^2)^2$.

7. Mostre que $(x + iy)^n(x - iy)^n = (x^2 + y^2)^n$.

8. Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões complexas seguintes:

a) $\frac{1}{2 + 3i}$; b) $\frac{1}{4 - 3i}$; c) $\frac{1 + i}{3 - 2i}$; d) $\frac{3 - i}{-1 + 2i}$; e) $\frac{1 - i}{1 + i}$; f) $\frac{1 + i}{1 - i}$;

$$g) \frac{4-3i}{-1+i} - \frac{1-i}{\sqrt{2}-i}; \quad h) \left(\frac{1}{1+i}\right)^2; \quad i) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}; \quad j) (1-i)(\sqrt{3}+i).$$

$$\text{Resps. } a) \frac{2-3i}{13}; \quad b) \frac{4+3i}{25}; \quad c) \frac{1+5i}{13}; \quad d) -1-i; \quad e) -i; \quad f) +i;$$

$$g) \frac{-23-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-5)i}{6}; \quad h) -i/2; \quad i) -1.$$

9. Represente graficamente os números complexos $z_1, z_2, z_1 z_2$ e z_1/z_2 nos seguintes casos:

$$a) \quad z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = \frac{1-i}{5\sqrt{2}};$$

$$b) \quad z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2};$$

$$c) \quad z_1 = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}, \quad z_2 = 1+i\sqrt{3};$$

$$d) \quad z_1 = 1+2i, \quad z_2 = 2-i;$$

$$e) \quad z_1 = 3-i, \quad z_2 = 3-\frac{i}{2}.$$

10. Verifique as seguintes relações:

$$a) \quad \operatorname{Re}[-i(2-3i)^2] = -12; \quad b) \quad \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} = -i;$$

$$c) \quad \operatorname{Im} \left[\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{-2+i} \right] = \frac{2(1+2\sqrt{3})}{5}.$$

11. Demonstre que

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2,$$

quaisquer que sejam os números complexos α e β . Faça um gráfico e obtenha a seguinte interpretação geométrica: a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.

12. Dados três vértices de um paralelogramo pelos números complexos z_1, z_2, z_3 , determine o vértice z_4 oposto a z_2 . Faça um gráfico.