Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Prova de Reposição de Física Matemática II
30 de novembro 2017, 8:50h

Nome: Professor: Daniel G. Barci

1. **(2.5)**
Mostre que a função real
$$u(x,y) = 2x(1-y)$$
é harmónica, e encontre a função harmónica conjugada $v(x,y)$. Construa a correspondente função analítica $f(z) = u + iv$ como função da variável complexa $z = x + iy$.

2. **(2.5)**
Defina a função
$$f(z) = (z-1)^{1/2}$$
de tal forma que ela seja **univalente**.
Indique onde a função é **descontinua** e calcule a descontinuidade.

3. **(2.5)**
Expandir a função
$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-i)}$$
em potências de $z-2$ e **indicar a região de convergência.**

4. **(2.5)**
Usando o teorema dos residuos calcule a seguinte integral.
$$\int_C z\, e^{(1/z)}\, dz \qquad , \qquad C : |z| = 1$$

PR

1) $u(x,y) = 2x(1-y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1-y)$ $\qquad$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$ $u(x,y)$ função harmônica

---

C-R $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = 2(1-y) \Rightarrow \boxed{v = 2y - y^2 + \phi(x)}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \phi'(x) = 2x \Rightarrow \phi(x) = x^2 + C$ (constante)

$\Rightarrow f(z) = u + iv$

$$\boxed{f(z) = 2x(1-y) + i(2y + x^2 - y^2) + C}$$

em termos de z.

$$\boxed{f(z) = 2z + iz^2 + C}$$

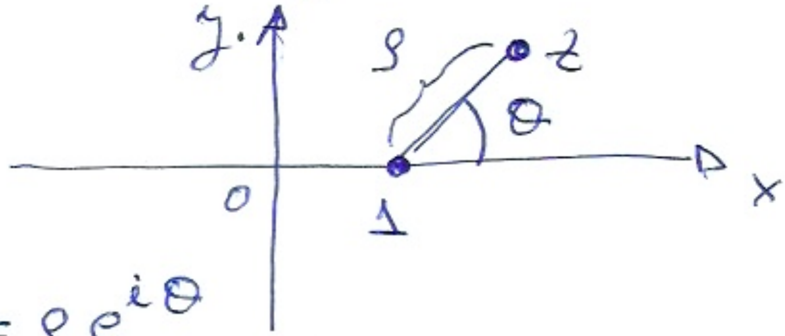
$f(z)$ = função Inteira já que é apenas um polinômio.

2)

$$f(z) = (z-1)^{1/2}$$

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}\ln(z-1)}$$

definição do logaritmo.



$$z-1 = \rho e^{i\theta}$$

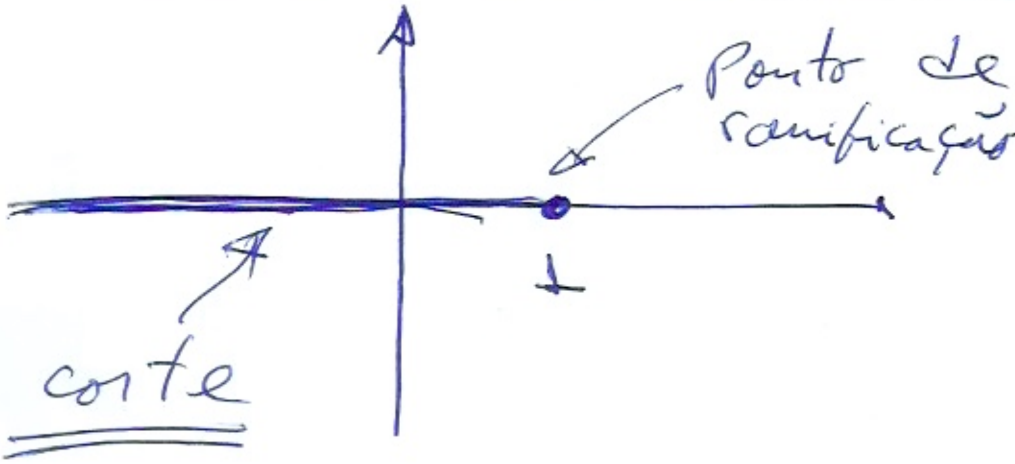
$$\Rightarrow \ln(z-1) = \ln\rho + i\theta$$

com a restrição do domínio.

$$\boxed{\rho > 0 \qquad -\pi < \theta < \pi}$$

$$\rightarrow \boxed{(z-1)^{1/2} = \rho^{1/2} e^{i\theta/2} \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} \rho = |z-1| \\ -\pi < \theta < \pi \end{array}}$$

<u>ésta é a definição solicitada.</u>



Demonstração

seja $x_0 < 1$

então.

$$\lim_{z \to x_0^+} \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \rho^{1/2} e^{i\pi/2} = i\rho^{1/2}$$

$$\lim_{z \to x_0^-} \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \rho^{1/2} e^{-i\pi/2} = -i\rho^{1/2}$$

descontinuidade.

$$\Delta = i\rho^{1/2} + i\rho^{1/2}$$

$$\Delta = 2\rho^{1/2} i \qquad \boxed{\Delta = 2|z-1|^{1/2}\, i}$$

3)

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-i)}$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2}\left\{\frac{1}{z-2+2-i}\right\} = \frac{1}{2-i}\,\frac{1}{z-2}\left\{\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-i}}\right\}$$

se $\left|\frac{z-2}{2-i}\right| < 1$ então

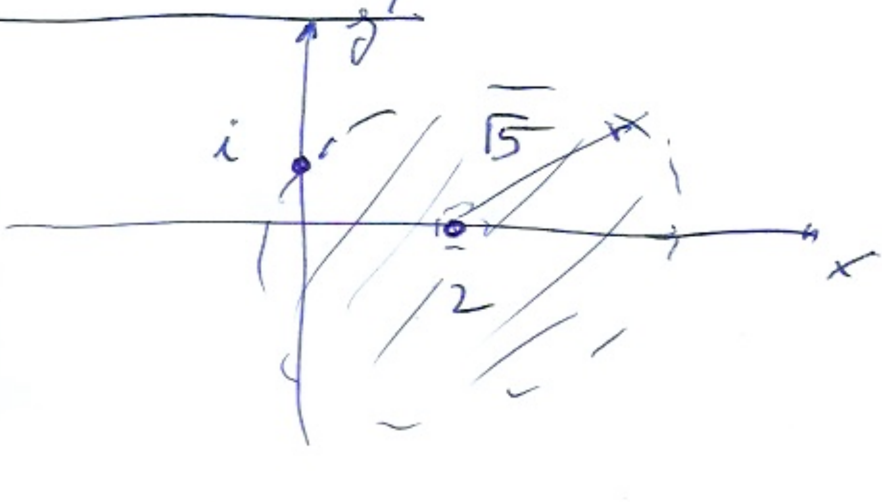
$$f(z) = \frac{1}{2-i}\left(\frac{1}{z-2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(z-2)^{n-1}}{(2-i)^{n+1}}}$$

Região de convergência

a $|z-2| < |2-i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$$\boxed{0 < |z-2| < \sqrt{5}}$$



4) $\int_C z e^{1/z} dz \qquad C: |z| = 1$

$z=0$ singularidade essencial

não é um pólo.

$$f(z) = z e^{1/z} = z \left\{ 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots \right\}$$

$$z e^{1/z} = z + 1 + \underbrace{\left[\frac{1}{2!}\right]}_{\text{Resíduo}} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^2} + \cdots$$

$$\boxed{\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\int_C z e^{1/z} dz = \frac{2\pi i}{2} = \pi i}$$